École des Hautes Études Commerciales

CONCOURS D'ADMISSION DE 1993

Mathématiques III

OPTION ÉCONOMIQUE

EXERCICE 1

On note E l'espace vectoriel des fonctions numériques définies et de classe C^2 sur $\mathbf{R}$. Soit F l'ensemble des éléments f de E tels que :

$$f'' - 3f' + 2f = 0.$$

Soit F_0 l'ensemble des éléments de F vérifiant en outre la relation $f(0) = f'(0) = 0$.

1. Montrer que F et F_0 sont des sous-espaces vectoriels de E.

2. Soit f_1 et f_2 les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par les relations :

$$f_1(x) = e^x \quad \text{et} \quad f_2(x) = e^{2x}$$

Montrer que f_1 et f_2 sont des éléments de F linéairement indépendants.

3. Soit f un élément de F.

a) Montrer qu'il existe un couple (a_1, a_2) et un seul de nombres réels tel que $f - a_1 f_1 - a_2 f_2$ appartienne à F_0.

b) Soit g_1 et g_2 les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par les relations :

$$g_1(x) = e^{-x}(f'(x) - 2f(x)) \quad \text{et} \quad g_2(x) = e^{-2x}(f'(x) - f(x))$$

Montrer que ces fonctions sont constantes.

c) En appliquant le résultat précédent, montrer que si f appartient à F_0, alors $f = 0$.

4. Soit Φ l'application de F dans $\mathbf{R}^2$ définie par la relation :

$$\Phi(f) = (f(0), f'(0))$$

Montrer que Φ est un isomorphisme de l'espace vectoriel F sur $\mathbf{R}^2$.

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$ et la fonction g définie sur $]1, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

L'objet de l'exercice est l'étude de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels déterminée par la condition intiale $u_0 = 1$ et par les relations de récurrence, valables pour tout nombre entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{2n+1} = f(u_{2n}) \\ u_{2n+2} = g(u_{2n+1}) \end{cases}$$

1. Justifier l'existence de $(u_n)_{n\geq 0}$ et montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $u_{2n+1} > 1$ et $u_{2n+2} > 0$.

2. Montrer que les équations $f(x) = x$ et $g(x) = x$ ont une solution commune et une seule. On note α cette solution.

3. Montrer que la fonction $\varphi = f \circ g$ est définie et décroissante sur $]1, +\infty[$.
Montrer que la fonction $\psi = \varphi \circ \varphi$ est définie et croissante sur $]1, +\infty[$. Calculer $\psi(\alpha)$.

4. Montrer que, pour tout élément x de $]1, \alpha[$:

$$\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{x}{x-1}}}{\sqrt{\frac{x}{x-1}}-1}} > x$$

5. Pour tout nombre entier naturel n, on pose $v_n = u_{4n+1}$.

a) Montrer que $v_0 < \alpha$.

b) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $v_{n+1} = \psi(v_n)$.

c) À l'aide du résultat de la question **4**, montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est croissante et que, pour tout nombre entier naturel n, $1 < v_n \leq \alpha$.

d) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est convergente et trouver sa limite.

6. On considère les trois suites $(u_{4n+2})_{n\geq 0}$, $(u_{4n+3})_{n\geq 0}$ et $(u_{4n+4})_{n\geq 0}$. Montrer que ces suites s'expriment simplement à l'aide de la suite $(v_n)_{n\geq 0}$. En déduire qu'elles sont convergentes et trouver leurs limites.

7. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente et trouver sa limite.

EXERCICE 3

L'objet de cet exercice est l'étude d'un exemple de discrétisation d'une variable aléatoire.

Pour tout nombre réel x, on note $[x]$ sa partie entière, c'est-à-dire le plus grand des nombres entiers inférieurs ou égaux à x. On note $\{x\}$ la partie décimale de x, définie par :

$$\{x\} = x - [x]$$

A. 1. Représenter graphiquement les fonctions définies sur **R** par :

$$x \mapsto [x],\ x \mapsto \{x\}, x \mapsto [2x] \text{ et } x \mapsto \{2x\}$$

2. Montrer que, pour tout nombre réel x :

$$[2x] = [x] + \left[x + \frac{1}{2}\right]$$

B. Soit X une variable aléatoire positive admettant pour densité une fonction f continue sur $[0, +\infty[$. On note F la fonction de répartition de X.

1. Pour tout nombre entier naturel non nul n, exprimer à l'aide de f la densité de la variable aléatoire nX.

2. Pour tout nombre entier naturel k, exprimer à l'aide de f ou de F la probabilité que $[X] = k$ (c'est-à-dire que la partie entière de X soit égale à k).

3. Pour tout nombre entier naturel non nul n, exprimer à l'aide de f ou de F la loi de la variable aléatoire à valeurs entières $[nX]$.

C. Soit λ un nombre réel strictement positif. On suppose maintenant que la fonction f est définie par les relations :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de répartition et l'espérance de X.

2. Déterminer la loi de la variable aléatoire $[X]$. De quelle loi s'agit-il ? Calculer l'espérance de $[X]$.

3. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on considère la variable aléatoire réelle discrète :

$$Y_n = \frac{1}{n}[nX]$$

Trouver l'espérance m_n de Y_n. Montrer que la suite $(m_n)_{n \geq 1}$ est convergente et trouver sa limite.

4. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire réelle $\{X\}$. En déduire la densité de $\{X\}$ et calculer son espérance.